Materialanalyse
WÜRFEL

Holzwürfel in fünf verschiedenen Farbnuancen von schwarz bis weiss.
Masse: 3x3 cm

MATHEMATISCHES POTENZIAL

Der Würfel ist einer von fünf platonischen Körpern und wird auch regelmässiges Hexaeder genannt. Er besteht aus sechs kongruenten Quadraten als Begrenzungsflächen, zwölf gleich langen Kanten und acht Ecken, in denen jeweils drei Begrenzungsflächen zusammentreffen.

Bei Modellen geometrischer Körper kann zwischen Massiv-, Flächen- und Kantenmodellen unterschieden werden. Bei den Holzwürfeln handelt es sich um **Massivmodelle** oder Vollkörper.

Massivmodelle lassen sich aus unterschiedlichen Materialien wie Holz, Metall, Styropor etc. herstellen. Die Eigenschaften der Körper lassen sich gut ertasten: Die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten der Körper ist "greifbar". Prinzipiell ist es möglich, Massivkörper in weitere, kleinere Körper zu zerlegen, da sie nicht hohl sind.

Flächenmodelle von Körpern können z.B. aus deren "Netzen" hergestellt werden. Es gibt elf unterschiedliche Netze, aus denen ein Würfel zusammengesetzt werden kann (Abb. 1).

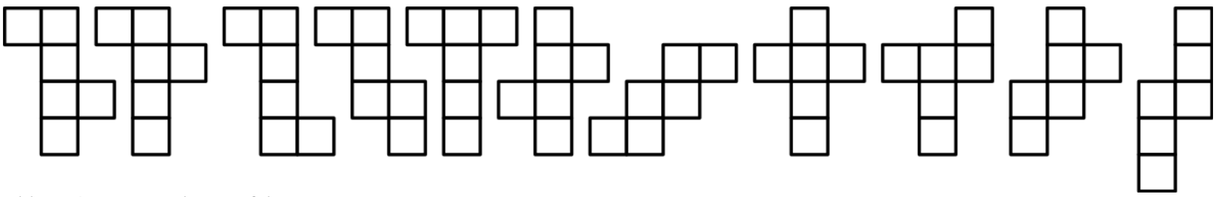


Abb. 1 Die 11 Netze des Würfels

Mit Netzen lassen sich geometrische Körper sozusagen "einpacken", sie können als Bastelvorlage zum Bauen von geometrischen Körpern, aber auch als Veranschaulichung bei der Berechnung des Flächeninhalts der Oberfläche dieser Körper dienen.

Im Alltag spielen Flächenmodelle vor allem in Kontext von Verpackungen eine Rolle (Abb. 2).

Abb. 2 Eine "Würfelverpackung"

Bei der Darstellung des Würfels als **Kantenmodell** existieren keine Flächen und kein Volumen. Ein solches Modell wird z.B. aus Stäben hergestellt. Der Fokus liegt bei den Kanten und Ecken des Würfels (Abb. 3).

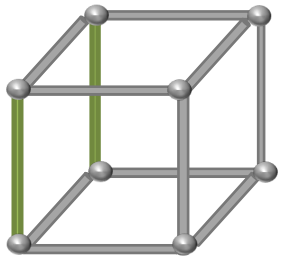


Abb. 3 Kantenmodell eines Würfels

Würfel können auch genutzt werden, um das Volumen von Quadern und aus Quadern zusammengesetzter Körper zu bestimmen. Dafür werden sogenannte Einheitswürfel verwendet. Diese Würfel stimmen in ihrer Kantenlänge und somit in ihrem Volumen überein und können deshalb genutzt werden, um ein grösseres Volumen "auszufüllen" (Abb. 4). Da die Kantenlänge eines Einheitswürfels von Fall zu Fall unterschiedlich ist, wird sie als eine Längeneinheit bezeichnet.

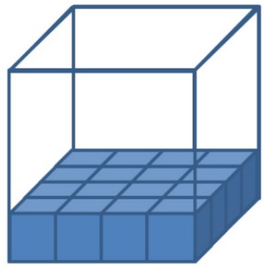


Abb. 4 Volumenberechnungen mit Einheitswürfeln

Praktischer Nutzen finden die Einheitswürfel beispielsweise in der Autoindustrie, wo sie zum Messen des Kofferraumvolumens eines Fahrzeuges eingesetzt werden.

Der Würfel, welcher ein dreidimensionaler Körper ist, kann als Parallelprojektion in der Ebene abgebildet werden. Eine gängige Parallelprojektion bei geometrischen Körpern ist das Schrägbild. Hier treffen die parallel verlaufenden Lichtstrahlen schräg auf die Projektionsfläche (Abb. 5).

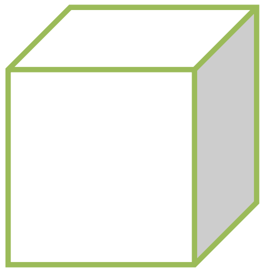


Abb. 5 Der Würfel in Schrägbilddarstellung

Bei der senkrechten Parallelprojektion treffen die parallelen Lichtstrahlen senkrecht auf die Projektionsfläche. Je nach Lage der Projektionsfläche entstehen verschiedene Ansichten des Körpers z.B. Grundriss, Aufriss oder Seitenriss.
Beim Würfel ist es egal, ob man von oben (Grundriss), von der Seite (Seitenriss) oder von vorne darauf schaut. Man "sieht" jeweils ein Quadrat.

Mit Würfeln lassen sich auch sogenannte "**figurierte Zahlen**" darstellen. Beispiele für figurierte Zahlen sind die Quadratzahlen, Kubikzahlen und Dreieckszahlen. Mit solchen Darstellungen lässt sich die Struktur einer Zahl hervorheben.
Möchte man aus kleinen Würfeln grössere Würfel bauen, dann benötigt man für den nächstgrösseren Würfel acht (kleine) Würfel. Dieser hat die doppelte Seitenlänge, aber das 8-fache Volumen. Der Würfel mit der dreifachen Seitenlänge hat dann schon das 27-fache Volumen. Man benötigt also 27 (kleine) Würfel. So lässt sich die Folge der Kubikzahlen visualisieren (Abb. 6).

1 8 27 64

Abb. 6 Kubikzahlen

Abbildung 7 zeigt den Beginn der Folge der Quadratzahlen: 1 weisser Würfel (1^2), 4 schwarze Würfel (2^2), 9 graue Würfel (3^2) usw. Abbildung 8 illustriert die Folge der ungeraden Zahlen: 1, 3, 5 usw.

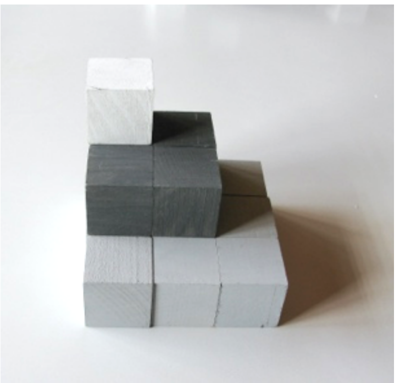


Abb. 7 Folge der Quadratzahlen

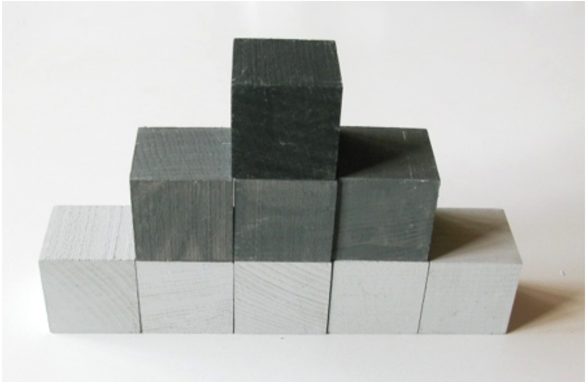
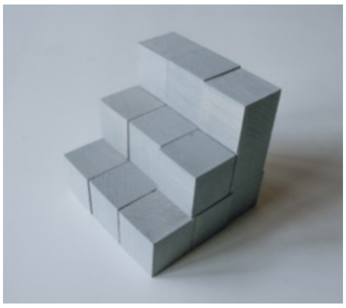


Abb. 8 Folge der ungeraden Zahlen

Da die Würfel über fünf unterschiedliche Farbabstufungen verfügen, ist es möglich, sie nach Farben bzw. Farbabstufung zu ordnen: Alle schwarzen, weissen und grauen Würfel bilden dann jeweils eine "Klasse". Es handelt sich um das **Klassifizieren**. Durch die Farbabstufung lässt sich auch eine Reihenfolge herstellen: Wenn die Würfel von dunkel nach hell oder von hell nach dunkel geordnet werden, handelt es sich um eine **Seriation**.

Mit den Würfeln lassen sich auf verschiedene Arten **Muster** legen. So können beispielsweise die Farbabstufungen der Würfel genutzt werden, um ein sich wiederholendes (Abb. 11) Muster zu erzeugen oder Muster können "wachsend" entstehen (Abb.10). Ein in sich abgeschlossenes Muster zeigt Abbildung 9.
Abbildungen 9 und 11 zeigen "ebene" Muster. Hier spielt die Dreidimensionalität des aus den Würfeln zusammengesetzten Körpers keine Rolle, für die Musterbetrachtung ist nur die Deckfläche (oder wenn das Gebilde in die Höhe gebaut ist, die Seitenfläche bzw. die "Vorderansicht") von Bedeutung. Ein Muster im Raum entsteht beispielsweise, wenn mit den Würfeln eine "Treppe" gebaut wird (Abb. 10). Diese lässt sich theoretisch unendlich fortsetzen – es ist kein sich wiederholendes Muster wie in Abbildung 11, sondern ein wachsendes Muster.



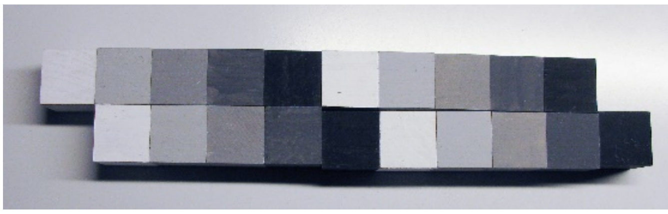


Abb. 9 symmetrisches Muster
Abb. 10 "Treppe", wachsendes Muster
Abb. 11 sich wiederholendes Muster

CURRICULARE EINORDNUNG – *Lehrplan 21*

Kinder interessieren sich schon früh für Zahlen, Formen und andere mathematische Ideen und Motive. Ein kompetenzorientierter Unterricht nimmt solche Motive auf und eröffnet Zugänge zu weiteren Einsichten, nämlich dass Mathematik ein Werkzeug ist, um die (Um-)Welt zu erschliessen und zu verstehen. Zugleich fördert er die Fähigkeit zum Erkennen von Zusammenhängen und Regelmässigkeiten, zum Transfer bzw. zur Verallgemeinerung und zum folgerichtigen Denken. Im Zentrum stehen das Verstehen elementarer mathematischer Begriffe und Operationen, das Erforschen, Entdecken und Darstellen mathematischer Beziehungen und Strategien, aber auch das Gespräch darüber. Die Schülerinnen und Schüler finden im Austausch mit anderen individuelle Zugänge zu mathematischen Problem- bzw. Fragestellungen, entwickeln Lösungsansätze und begründen ihre Überlegungen und Vorgehensweisen. Der Einsatz von Materialien unterstützt eine wesentliche Absicht des Lehrplans, nämlich mathematisches Tun (Handlungsaspekte) mit mathematischen Inhalten (Kompetenzbereiche) zu verbinden.

Vgl. Einleitung LP21 Mathematik

Kompetenzbereich Form und Raum, Handlungsaspekt Operieren und Benennen (MA 2.A.1 und 2)

- *Geometrische Begriffe verstehen und verwenden*
  - *geometrische Formen benennen und ordnen*
- *Figuren und Körper abbilden*
  - *Figuren und Körper legen und bauen*
  - *geometrische Figuren (nach)zeichnen, symmetrisch ergänzen*
- *Figuren und Körper zerlegen und zusammensetzen*

Kompetenzbereich Form und Raum, Handlungsaspekt Erforschen und Argumentieren (MA 2.B)

- *geometrische Beziehungen erforschen, Vermutungen formulieren und Erkenntnisse austauschen*

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/7/79/W%C3%BCrfelnetze.svg
Abb. 2: https://pixabay.com/de/vectors/box-karton-w%C3%BCrfel-isometrische-1299001/
Abb. 3: Christine Streit
Abb. 4: https://www.mathe-lexikon.at/geometrie/geometrische-koerper/wuerfel/volumen.html
Abb. 5: Christine Streit
Abb. 6: http://www.mathematische-basteleien.de/kubikzahlen.htm
Abb.7-11: Barbara Wyss