Materialanalyse
PATTERN BLOCKS

Pattern Blocks bestehen aus fünf verschiedenen geometrischen Grundformen:
- gleichseitiges Dreieck (grün)
- Quadrat (orange)
- zwei verschiedene Rauten (blau, naturfarben)
- symmetrisches Trapez (rot)
- gleichseitiges Sechseck (gelb)

Die Formen haben alle die gleiche Kantenlänge; nur beim roten symmetrischen Trapez weist die lange Grundlinie die doppelte Länge auf. Die Innenwinkel betragen bei der kleinen Raute 30° und 150°, bei der grossen Raute und beim gleichschenkligen Trapez 60° und 120°.

MATHEMATISCHES POTENZIAL

Aufgrund der Eigenschaften der Pattern Blocks lässt sich die blaue Raute aus zwei und das Trapez aus drei Dreiecken (oder einer blauen Raute und einem Dreieck) zusammensetzen. Entsprechend bestehen für das regelmässige Sechseck mehrere Zerlegungs- und Zusammensetzungsmöglichkeiten:
- 6 Dreiecke
- 2 Trapeze
- 1 Trapez, 1 blaue Raute, 1 Dreieck
- 1 Trapez, 3 Dreiecke
- 3 blaue Rauten
- 2 blaue Rauten, 2 Dreiecke
- 1 blaue Raute, 4 Dreiecke

In Tätigkeiten des Zusammensetzens und Zerlegens werden **Teile-Ganze-Beziehungen** erfahrbar: Verschiedene Teile können unter bestimmten Umständen zusammen ein Ganzes mit neuen Eigenschaften bilden, ohne dass die einzelnen Teile darin völlig verschwinden. So lassen sich mit den Pattern Blocks Muster und Bilder legen sowie Gebilde bauen, die grösser und bunter als jedes einzelne Teil sind – und trotzdem bleiben die einzelnen Formen als solche erkennbar. Im Kern geht es um die Erkenntnis, dass sich das Ganze aus unterschiedlichen Teilen zusammensetzen lässt. Das gilt für Formen genauso wie für Zahlen – so lässt sich die 8 aus 4+4, aus 5+3 oder aus 3+3+2 zusammensetzen.

Das Potenzial des Materials aus mathematischer Sicht liegt vor allem im Bereich der (geometrischen) **Muster.**
Mathematik wird auch als *Wissenschaft der Muster und Strukturen* beschrieben, denn in der Mathematik geht es weniger um einzelne Objekte, sondern vor allem um die Beziehungen zwischen diesen Objekten. Diese Beziehungen lassen bestimmte Regelmässigkeiten erkennen, die sich als Muster bzw. Strukturen beschreiben lassen.
Mathematische Muster und Strukturen zeigen sich in der Arithmetik (Zahlenmuster) ebenso wie in der Geometrie, können sich aber auch beim Lösen von Sachsituationen oder mathematischen Problemen herausbilden. Das Erkennen von Mustern bedingt die Vernachlässigung unwichtiger Details und das Herausarbeiten übereinstimmender oder unterscheidender Merkmale.

In geometrischen Mustern wie Rosetten, Bandornamenten oder Parketten wird ein Grundelement nach einer "Regel" mehrfach angeordnet. Meistens spielt dabei die Symmetrie eine wichtige Rolle. Die unterschiedlichen Symmetrien lassen sich abbildungsgeometrisch durch Kongruenzabbildungen beschreiben. Im Folgenden wird die Idee der Symmetrie daher etwas ausführlicher beschrieben:

Symmetrie
Die Idee der Symmetrie (als ein besonderes Muster) durchzieht unsere gesamte belebte wie unbelebte Umwelt: Symmetrische Objekte erleben wir als ästhetisch, harmonisch bis hin zu formvollendet. Symmetrie zeigt sich – grob gesagt – in der Wiederholung von Gleichartigem (griech. symmetros = gleichmässig). Offenbar ist unser Wahrnehmen von Erscheinungen unserer Umwelt stark geprägt von der Fähigkeit, sensorische Eindrücke in zu vergleichende Teile zu gliedern. Wahrnehmen ist Erkennen von gegliederten Gestalten, also von Mustern. Prototypisch und am augenfälligsten manifestiert sich Symmetrie in geometrischen Gestalten, und dabei insbesondere in der bilateralen Symmetrie ebener und räumlicher Gebilde (Winter 2001). In ebenen Figuren ist neben der Achsensymmetrie (Abb. 2) vor allem die Drehsymmetrie zu erwähnen, wie sie in den Abbildungen 3 und 4 zum Tragen kommt. Abbildung 3 ist mehrfach dreh- und achsensymmetrisch, Abbildung 4 ist nur drehsymmetrisch.
Symmetrische Gebilde, Lebewesen etc. erscheinen uns in der Umwelt allgegenwärtig. Die mathematische Idee der Symmetrie ist allerdings eine abstrakte, entsprechend sind natürliche wie auch künstliche Objekte immer nur annähernd symmetrisch. Es sind nur "Modelle" für Symmetrien: sie also solche zu begreifen, unterliegt immer einem (geistigen) Idealisierungsprozess.


Abb. 2 Schmetterling

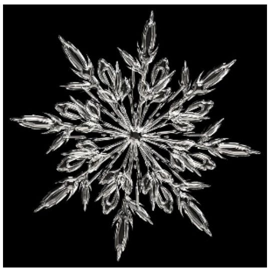


Abb. 3 Eiskristall


Abb. 4 Ying-Yang-Symbol

In der Mathematik bezeichnet Symmetrie nicht nur das Phänomen, dass eine Figur symmetrisch ist, sondern auch die Abbildung, die dem Phänomen zugrunde liegt.
Eine ebene geometrische Figur ist symmetrisch, wenn es mindestens eine "Deckabbildung" gibt, die die Figur auf sich selbst abbildet. Diese Deckabbildungen umfassen Achsenspiegelung, Drehung, Verschiebung sowie Kombinationen davon.
Aus der Verkettung von zwei oder mehreren Achsenspiegelungen lässt sich jede andere Deckabbildung erzeugen. So entsteht z.B. eine Drehung durch eine Verkettung von zwei Achsenspiegelungen, deren Symmetrieachsen sich schneiden. Der Schnittpunkt wird dann zum Drehpunkt und der Drehwinkel entspricht dem doppelten Schnittwinkel der Achsen.

Pattern Blocks regen dazu an symmetrische Muster zu legen. Diese lassen sich unterscheiden in einfache geometrische Muster, die in sich selbst abgeschlossene Einheiten bilden (Abb. 5 und 6), Bandornamente, die sich in eine Richtung (bis ins Unendliche) wiederholen und Parkette, bei denen die Ebene (theoretisch ebenfalls bis ins Unendliche) lückenlos bedeckt wird.
Abbildungen 5 und 6 zeigen in sich abgeschlossene Muster, die mehrfach achsen- und drehsymmetrisch sind.

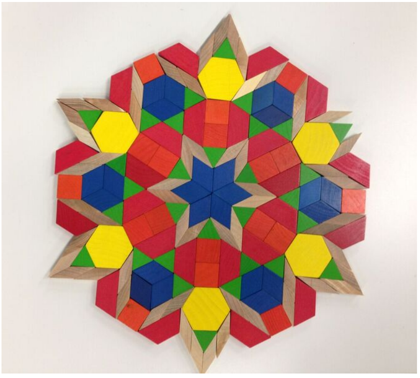


Abb. 5 Muster mit Pattern Blocks I
Abb. 6 Muster mit Pattern Blocks II

Bandornamente
Unter einem Bandornament versteht man eine durch zwei parallele Geraden begrenzte Figur, die translationssymmetrisch ist. Das bedeutet, dass die Figur, die man sich "unendlich" denken muss, durch Verschiebung auf sich selbst abgebildet werden kann. Die Grundfigur ist der kleinste Teil, mit dem man durch Verschiebung das Ornament fortsetzen kann.
In Bandornamenten kommen folgende Deckabbildungen vor:

- *Verschiebung parallel zum Streifen*
- *Längsspiegelung (Spiegelung an der Mittellinie)*
- *Querspiegelung (Spiegelung an Achsen senkrecht zum Band)*
- *Punktspiegelung (Spiegelung an Punkten der Mittellinie)*
- *Schubspiegelung (Verknüpfung von Verschiebung und Achsenspiegelung mit Mittellinie als Achse)*

Nach den Deckabbildungen klassifiziert gibt es genau sieben Typen von Bandornamenten:

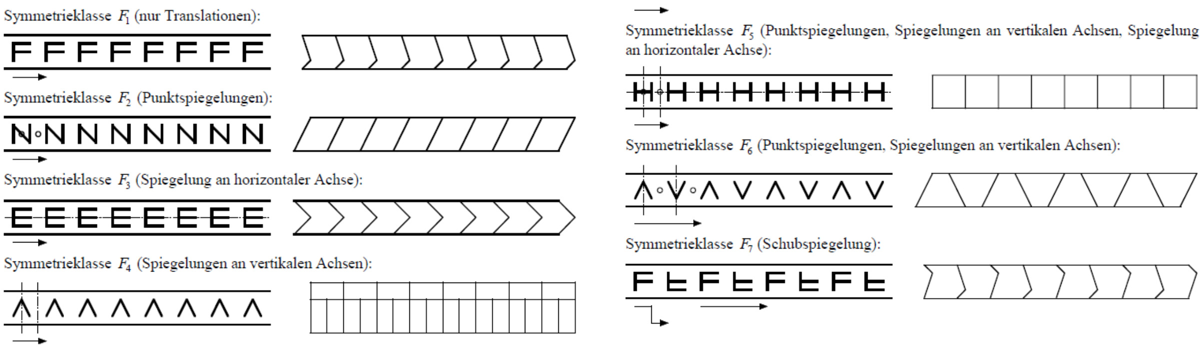
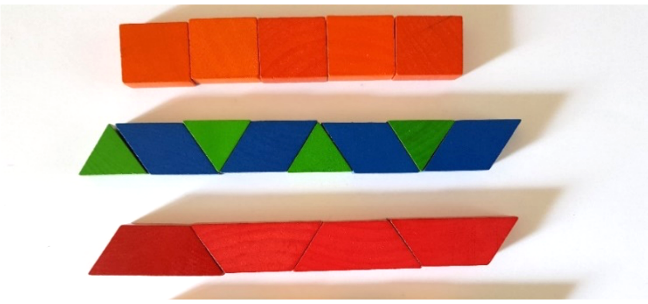


Abb. 7 Symmetrieklassen bei Bandornamenten

Mit den Pattern Blocks lassen sich ganz verschiedene Bandornamente erzeugen wie Abbildung 8 zeigt.



Symmetrieklasse F5

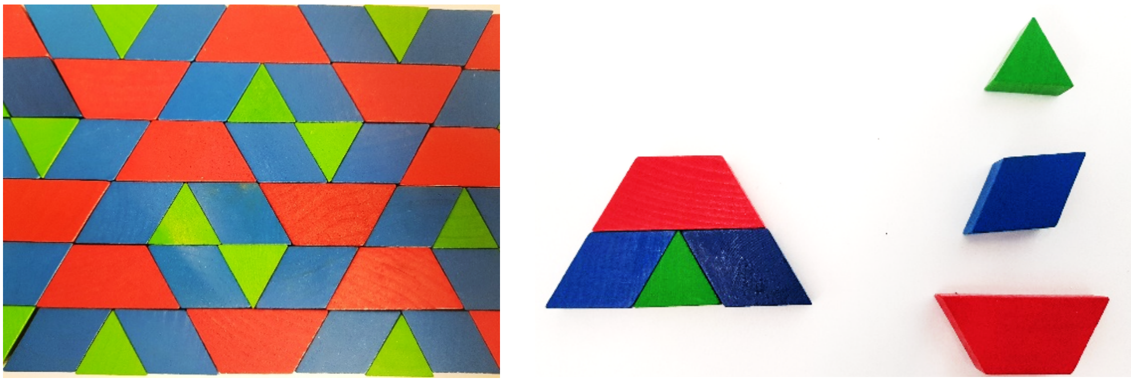
Symmetrieklasse F7

Symmetrieklasse F6

Abb. 8 Bandornamente aus Pattern Blocks

Parkette

Eine Parkettierung, auch Kachelung oder Pflasterung genannt, ist eine lückenlose und überlappungsfreie Überdeckung der Ebene. Die meisten Parkette, die uns im Alltag begegnen, sind so genannte regelmässige oder periodische Parkette. Ein regelmässiges Parkett entsteht durch das wiederholte Verschieben (und ggf. Drehen oder Spiegeln) einer Ausgangsfigur, die wiederum aus mehreren Parkettsteinen bestehen kann (Abb. 9).



Parkett Ausgangsfigur Parkettsteine

Abb. 9 Parkett, Ausgangsfigur und Parkettsteine

Mit welchen Formen lässt sich ein Parkett erstellen?

Mit Dreiecken und Vierecken ist dies immer möglich – egal ob es regelmässige oder unregelmässige Figuren sind. Wenn man ein beliebiges Dreieck an einem Seitenmittelpunkt spiegelt, entsteht ein Parallelogramm. Dieses stellt die Ausgangsfigur für das Parkett dar. Damit lässt sich nun die Ebene parkettieren (vgl. Abb. 10).

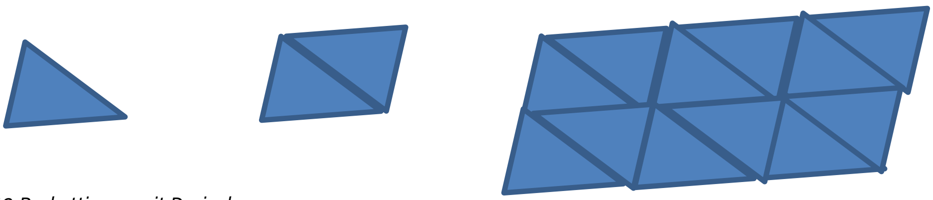


Abb. 10 Parkettieren mit Dreiecken

Auch mit beliebigen Vierecken kann man parkettieren, selbst mit so genannten "konkaven" bzw. "überschlagenen" Vierecken (Abb. 11). Dies ist darin begründet, dass die Summe aller 4 Innenwinkel in jedem Viereck 360° beträgt. Da beim Parkettieren mit Vierecken genau 4 Winkel aneinanderstossen, lässt sich immer ein Vollwinkel erzeugen.

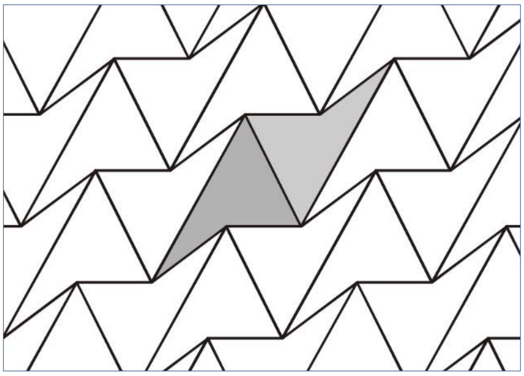
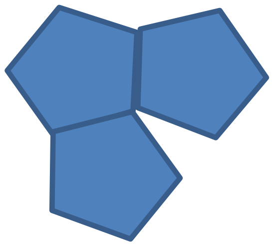
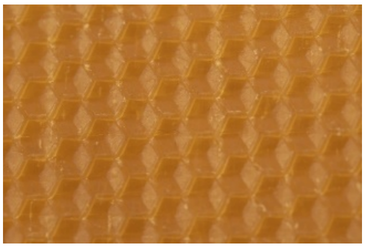


Abb. 11 Parkett mit überschlagenen Vierecken



Mit anderen Figuren, z.B. mit regelmässigen Fünfecken (vgl. Abb. 12), geht es nicht. Da bleibt immer eine Lücke. Woran liegt das? Die Erklärung ist einfach: Um die Lücken schliessen zu können, muss beim Aneinanderlegen der Figuren ein Vollwinkel entstehen, also 360°. Die Innenwinkel im regemässigen Fünfeck betragen aber 108°, das ist kein Teiler von 360° – es bleibt eine Lücke.

Abb. 12 Fünfecke



Beim regelmässigen Sechseck funktioniert das Parkettieren, da hier die Winkel 120° betragen. Ein schönes Beispiel aus der Natur hierfür sind Bienenwaben (Abb. 13).

Abb. 13 Bienenwaben

Beim Parkettieren mit Pattern Blocks gibt es sehr viele Möglichkeiten, um eine Ausgangsfigur zu generieren – von ganz einfachen, die aus nur einem Parkettstein (also einer Form) bestehen bis hin zu komplexen, die aus mehreren Parkettsteinen zusammengesetzt sind. Bei einer Parkettierung mit Rauten und Quadraten entsteht ein Muster, welches eine räumliche Wirkung erzeugt. Die Ausgangsfigur umfasst ein Quadrat, eine naturfarbene und eine blaue Raute (Abb. 14).

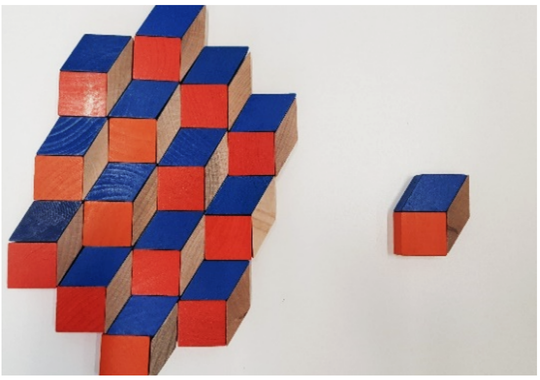


Abb. 14 räumlich wirkendes Parkett, Ausgangsfigur rechts im Bild

CURRICULARE EINORDNUNG – *Lehrplan 21*

Kinder interessieren sich schon früh für Zahlen, Formen und andere mathematische Ideen und Motive. Ein kompetenzorientierter Unterricht nimmt solche Motive auf und eröffnet Zugänge zu weiteren Einsichten, nämlich dass Mathematik ein Werkzeug ist, um die (Um-)Welt zu erschliessen und zu verstehen. Zugleich fördert er die Fähigkeit zum Erkennen von Zusammenhängen und Regelmässigkeiten, zum Transfer bzw. zur Verallgemeinerung und zum folgerichtigen Denken. Im Zentrum stehen das Verstehen elementarer mathematischer Begriffe und Operationen, das Erforschen, Entdecken und Darstellen mathematischer Beziehungen und Strategien, aber auch das Gespräch darüber. Die Schülerinnen und Schüler finden im Austausch mit anderen individuelle Zugänge zu mathematischen Problem- bzw. Fragestellungen, entwickeln Lösungsansätze und begründen ihre Überlegungen und Vorgehensweisen. Der Einsatz von Materialien unterstützt eine wesentliche Absicht des Lehrplans, nämlich mathematisches Tun (Handlungsaspekte) mit mathematischen Inhalten (Kompetenzbereiche) zu verbinden.

Vgl. Einleitung LP21 Mathematik

Kompetenzbereich Form und Raum, Handlungsaspekt Operieren und Benennen (MA 2.A.1 und 2)

- *Geometrische Begriffe verstehen und verwenden*
    - *geometrische Formen benennen und ordnen*
- *Figuren und Körper abbilden*
    - *geometrische Figuren (nach)zeichnen, symmetrisch ergänzen, spiegeln*
- *Figuren und Körper zerlegen und zusammensetzen*
- *Ornamente und Parkette bilden, beschreiben, weiterführen und verändern*

Kompetenzbereich Form und Raum, Handlungsaspekt Erforschen und Argumentieren (MA 2.B.1 und 2)

- *geometrische Beziehungen erforschen, Vermutungen formulieren und Erkenntnisse austauschen*

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Christine Streit
Abb. 2: https://pixabay.com/de/photos/schmetterling-insekt-fl%C3%BCgel-natur-1218884/
Abb. 3: https://pixabay.com/de/illustrations/eiskristall-schneeflocke-eis-form-64157/
Abb. 4: https://pixabay.com/de/vectors/yin-und-yang-gleichgewicht-harmonie-152420/
Abb. 5,6: Christine Streit
Abb. 7: aus http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienDB/41/symmetrie.pdf
Abb. 8, 9: Christine Streit
Abb. 11: https://www.mathelounge.de/175276/parkettierung-mit-uberschlagenen-vierecken
Abb. 13 https://pixabay.com/de/photos/bienenwachs-waben-bienen-waben-233755/
Abb. 14: Christine Streit